

**T.C.**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN FAKÜLTESİ**

**İSTATİSTİK BÖLÜMÜ**

**LİNDLEY DAĞILIMI İLE CLM SÜREÇ YETERLİLİK İNDEKSİNİN İNCELENMESİ**

**YUNUS AHMET DOKAZOĞLU**

**LİSANS TEZİ**

**MAYIS-2025**

**İÇİNDEKİLER**

[1. GİRİŞ 3](#_Toc264304889)

[2. SÜREÇ YETERLİLİK ANALİZİ VE İNDEKSLERİ 5](#_Toc264304890)

[2.1. Süreç Yeterlilik Analizine Genel Bakış 5](#_Toc264304891)

[2.2. Süreç Yeterlilik Endeksleri (PCI) ve Tanımları 5](#_Toc264304892)

[2.3. Tek Taraflı Spesifikasyon ve Asimetrik Süreçler 6](#_Toc264304893)

[2.4. Asimetrik Dağılımlar ve Geleneksel PCI’ların Sınırları 6](#_Toc264304894)

[2.5. Yaşam Süresi Verileri ve Sansürleme Şemaları 7](#_Toc264304895)

[2.6. Literatürdeki Çalışmalar ve Araştırma Açığı 9](#_Toc264304896)

[2.7. Çalışmanın Katkısı ve Hedefleri 9](#_Toc264304897)

[3. YENİ YAŞAM PERFORMANSI ENDEKSİ](#_Toc264304900) 9

[3.1. Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu 12](#_Toc264304901)

[3.2. Lindley dağılımının parametre tahmini ve simülasyonu 12](#_Toc264304902)

[3.3. Lindley dağılımdan paket dışında sayı üretme 13](#_Toc264304903)

[3.4. Lindley dağılımının beklenen değeri ve varyansı 13](#_Toc264304904)

[3.5. CLM indeksinin Bias,MSE,ABB,MRE tahmin simülasyonu](#_Toc264304914) 14

[3.6. CLM İndeksinin Bias, MSE, ABB, MRE tahmin simülasyon sonuçları](#_Toc264304917) 17

[3.7. CLM İndeksi Tahmin Performansı Üzerine Detaylı Değerlendirme 20](#_Toc264304915)

[4. UYGULAMA 24](#_Toc264304913)

[5.3. Temel İstatistiksel Hesaplamalar 24](#_Toc264304916)

[5.5. Grafik Üzerinden Detaylı Açıklama 25](#_Toc264304918)

[5. KAYNAKLAR 27](#_Toc264304919)

1. **GİRİŞ**

Üretim süreçlerinin güvenilirliği ve verimliliği, özellikle tıbbi cihazlar, otomotiv parçaları, elektronik ekipmanlar ve savunma sanayi ürünleri gibi kritik sektörlerde büyük bir önem taşımaktadır. Bu tür ürünlerde sadece üretim anındaki kalite değil, aynı zamanda ürünlerin kullanım süresi boyunca işlevselliğini ne kadar koruyacağı da önemli bir değerlendirme kriteridir. Ürünlerin ömrü, yalnızca üretim aşamasındaki kalite kontrolü ile değil, aynı zamanda uzun vadeli kullanım koşullarındaki performanslarıyla da doğrudan ilişkilidir. Bu bağlamda, ürün ömrü ve performansının istatistiksel olarak değerlendirilmesi ve bir performans göstergesi aracılığıyla ifade edilmesi kritik bir gerekliliktir.

Ömür performansı endeksi (Life Performance Index, LPI), ürünlerin kullanım ömrü boyunca kalite gereksinimlerini ne ölçüde sağladığını belirten bir metriktir. LPI, geleneksel süreç yeterlilik endekslerinden farklı olarak sadece üretim sürecindeki verilerle değil, aynı zamanda ürünlerin yaşam süresi boyunca maruz kaldığı çevresel koşullar, yükler ve yıpranma gibi faktörleri de göz önünde bulundurur. Bu durum, özellikle dayanıklılık ve güvenilirlik gerektiren ürünler için sürecin değerlendirilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

Bu çalışmada, ömür performansı endeksi, Weibull dağılımı altında tanımlanmış ve Tip-I hibrit sansürleme şeması altında elde edilen verilere dayanarak hesaplanmıştır. Hem klasik maksimum olabilirlik tahmini (MLE) hem de Bayesyen çıkarım yöntemleriyle bu endeksin nasıl ele alındığı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle, ürün ömrü analizlerinde sıklıkla karşılaşılan sansürleme ve parametre tahmini gibi konular, bu çalışma kapsamında detaylı bir şekilde ele alınmış ve istatistiksel yöntemlerin etkinliği test edilmiştir.

Günümüzde, üretim süreçlerinin iyileştirilmesi ve kalite kontrolünün sağlanmasında kullanılan süreç yeterlilik endeksleri (Process Capability Indices – PCI), önemli araçlardan biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu endeksler, kalite karakteristiklerinin belirli sınırlar içerisinde ne ölçüde yer aldığını değerlendirir. Geleneksel PCI’lar, normal dağılım varsayımı altında hesaplanmakta olup, genellikle şu şekilde ifade edilir:

Burada USL ve LSL, sırasıyla üst ve alt spesifikasyon limitlerini, ortalama değerini, ise standart sapmayı temsil eder. Bu hesaplamalar, ürünün üretim sürecindeki hataları ve kalite kontrolünü değerlendirirken kritik bir rol oynar. Ancak, gerçek dünya üretim süreçleri çoğunlukla normal dağılımdan sapmalar göstermektedir. Asimetrik dağılımlar, özellikle delme, kaplama ve kimyasal işlemler gibi üretim süreçlerinde yaygın olarak gözlemlenen durumlardır. Bu tür süreçler için geleneksel PCI’lar yanıltıcı sonuçlar verebilir ve bu nedenle asimetrik dağılımlar için özel olarak geliştirilmiş PCI’lar daha anlamlı sonuçlar verebilir.

Son yıllarda, bu tür asimetrik dağılımlar ve geleneksel PCI’ların sınırları üzerine yapılan çalışmalar artmıştır. Ancak, bu alanda yapılan mevcut literatür incelemeleri, genellikle parametre tahmini ve klasik süreç yeterlilik indekslerinin geliştirilmesi üzerine yoğunlaşmış, ancak daha derinlemesine analizler ve alternatif yaklaşımlar üzerine çalışmalar sınırlı kalmıştır. Örneğin, Lindley dağılımı gibi daha esnek ve çarpık modellerin, süreç yeterliliği analizinde kullanımı, önemli bir araştırma boşluğu oluşturmaktadır.

Bu tezde, Lindley dağılımı temelli CLM (Capability Life Measurement) süreç yeterlilik indeksi, asimetrik dağılımların analizine odaklanmaktadır. Bu çalışmanın amacı, Lindley dağılımı ve CLM indeksi arasındaki ilişkiyi ortaya koymak ve bu ilişkiyi, özellikle asimetrik dağılımlar için geliştirilmiş alternatif PCI’lar ile karşılaştırmaktır. Ayrıca, Weibull dağılımı temelli Tip-I hibrit sansürleme şeması altında, bu yeni indeksin performansı, teorik ve pratik anlamda değerlendirilmiştir.

Çalışma, parametre tahmini, güven aralıkları ve model performansının değerlendirilmesinde kullanılan ileri düzey istatistiksel yöntemlere dayanmaktadır. Ayrıca, Monte Carlo simülasyonları kullanılarak, çeşitli örneklem büyüklükleri ve dağılım parametreleri için yapılan deneyler aracılığıyla, yeni indeksin doğruluğu ve geçerliliği test edilmiştir. Bu yöntemlerin, özellikle asimetrik ve non-parametrik veri setlerinde sağladığı avantajlar vurgulanmıştır.

Tezin ana katkısı, Lindley dağılımı temelli CLM indeksinin, asimetrik süreçlerde geleneksel PCI’lardan daha doğru sonuçlar verdiğini göstererek, kalite kontrol süreçlerine yeni bir bakış açısı kazandırmasıdır. Bu çalışma, ayrıca, asimetrik dağılımlarla yapılan süreç yeterliliği analizlerinin, geleneksel yöntemlere göre daha hassas ve güvenilir sonuçlar sunduğunu ortaya koymayı hedeflemektedir. Böylece, endüstriyel süreçlerde kalite kontrolü ve iyileştirilmesi için güçlü bir istatistiksel altyapı sunulmaktadır.

1. **SÜREÇ YETERLİLİK ANALİZİ VE İNDEKSLERİ**
   1. **Süreç Yeterlilik Analizine Genel Bakış**

Kalite yönetimi ve üretim süreçlerinin istatistiksel kontrolünde önemli bir yer tutan süreç yeterlilik analizi (Process Capability Analysis), ürünlerin belirli kalite ve spesifikasyon kriterlerini karşılayıp karşılamadığını belirlemeye yönelik temel araçlardan biridir. Modern üretim sistemlerinde, yalnızca ürünlerin üretilmesi değil, aynı zamanda bu ürünlerin müşteri beklentileri ve teknik şartnameler doğrultusunda kaliteli ve tutarlı şekilde üretilmesi esastır. Süreç yeterliliği, bu bağlamda, bir sürecin belirli bir zaman aralığında, belirlenen spesifikasyon sınırları içerisinde üretim yapabilme yeteneğini tanımlar. Sürecin performansı ve kalitesi, bu analizler yoluyla hem izlenebilmekte hem de iyileştirilebilmektedir.

* 1. **Süreç Yeterlilik Endeksleri (PCI) ve Tanımları**

Süreç yeterliliğini nicel olarak ifade edebilmek amacıyla geliştirilmiş en temel ölçütler süreç yeterlilik endeksleridir (Process Capability Indices – PCI). Bu endeksler, kalite karakteristiklerinin, önceden belirlenmiş spesifikasyon sınırları arasında ne ölçüde yer aldığını değerlendirmektedir. Geleneksel PCI’lar normal dağılım varsayımı altında hesaplanır ve çoğunlukla şu formüllerle ifade edilir:

Nerede 𝑈, 𝐿, 𝑇, 𝜎 ve μ sırasıyla üst ve alt spesifikasyon limitleri, hedef değer, standart sapması ve ortalamasıdır. Yukarıda bahsedilen PCI'lar ürün kalitesini ölçmek için iki spesifikasyon limitine sahiptir.

**2.3 Tek Taraflı Spesifikasyon ve Asimetrik Süreçler**

Pratik üretim senaryolarında, üreticiler ve müşteriler genellikle yalnızca alt ya da üst spesifikasyon sınırına odaklanabilir. Örneğin, güvenlik ekipmanları için minimum dayanıklılık değeri daha kritik olabilirken, ilaç üretimi gibi sektörlerde üst sınır aşımı hayati önem taşıyabilir. Bu durumlarda tek taraflı PCI'lar kullanılmaktadır. Kane tarafından önerilen ve yalnızca alt sınırı dikkate alan endeks:  
  
Bu endeksler, yalnızca tek yönlü tolerans dikkate alındığında daha anlamlı sonuçlar verir. Ancak, tüm bu geleneksel PCI’ların altında yatan önemli bir varsayım, sürecin normal dağıldığı yönündedir.

**2.4 Asimetrik Dağılımlar ve Geleneksel PCI’ların Sınırları**

Gerçek üretim verilerinin çoğu zaman normal dağılım göstermediği bilinmektedir. Özellikle delme, kaplama ve kimyasal işlemler gibi süreçler, doğaları gereği asimetrik dağılımlara sahiptir. Bu tür süreçlerde, geleneksel PCI'lar yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Bu sebeple, asimetrik dağılımlı veriler için özel olarak geliştirilmiş PCI’lar geliştirilmiştir.  
 Örneğin, delme işlemleri, kaplama işlemleri ve kimyasal işlemler için ölçüm verileri süreçleri genellikle asimetrik bir dağılım izler. Geleneksel eğitimin kalitesini artırmak için Clements, bu durumu dikkate alarak dağılımın çeyreklerine dayalı alternatif endeksler önermiştir:

Asimetrik olarak dağıtılmış veriler için PCI'lar, Clements Cp ve Cpk sırasıyla Cp(q) ve Cpk(q) ile ifade edilir. Asimetrik dağılımlar için iki yeni PCI vardır. Sırasıyla şu şekilde gösterilir

Burada L0.00135, U0.99865 ve μ sırasıyla 0.00135-quantile, 0.99865-quantile ve kalite karakteristik ölçümlerinin medyanı.

**2.5 Yaşam Süresi Verileri ve Sansürleme Şemaları**

Süreç yeterliliği ve performansı, yalnızca üretim anındaki kalite ile değil, aynı zamanda ürünlerin kullanım ömrüyle de doğrudan ilişkilidir. Özellikle dayanıklılık ve güvenilirlik gerektiren ürünlerde, yaşam süresi analizleri büyük önem taşır. Bu tür analizlerde genellikle Weibull dağılımı, esnek yapısı nedeniyle tercih edilmektedir. Ancak, ömür testleri hem zaman alıcı hem de maliyetlidir. Bu nedenle sansürleme şemaları yaygın olarak kullanılmaktadır.

Asimetrik dağılımlar için CL’de değiştirilmelidir. Çalışmada asimetrik dağılımlar için yeni bir modifikasyon tavsiye edilecektir. Weibull dağılımı ürünlerin kullanım ömrünü başarılı bir şekilde uzatmıştır. Ürünlerin ömür testinin zaman ve maliyetinden tasarruf etmek için, Tip-I ve Tip-II sansürleme şemaları yaşam testlerini uygulamak için genellikle tercih edilmişlerdir. Tip-I sansürleme bir zaman kullanır, sansürleme şeması ve yaşam testi önceden belirlenmiş olan T zamanında sonlandırılırsa, o zaman T'ye eşit veya daha küçük başarısızlık süreleri tip-I sansürleme örneği olarak kaydedilir.

Tip-II sansürlemesine başarısız sayı sansürleme şeması da denir. Mühendisler tarafından yaşam testinden önce r başarısız yaşam süreleri önceden belirlenen Tip-II sansürlü örneklem olarak toplanmıştır. Sansürleme şemasını daha esnek hale getirmek için Epstein Tip-I hibrit sansürleme şemasını tanıtmıştır. Yaşam testi aşağıdaki durumlarda sonlandırılabilir:

Tip-I ve Tip-II sansürleme şemalarının minimum sonlandırma süresi.

Yaşam testi Tip-I ve Tip-II sansürleme şemalarının maksimum sonlandırması zamanında sonlandırıldığında, sansürleme şeması Tip-II hibrit sansürleme şeması olarak tanımlanır. Günümüzde birçok araştırmacı normal olmayan dağılımlar için yaşam performansı endeksine katkıda bulunmuştur.

-Tip-I sansürleme: Test, önceden belirlenen bir T zamanında durdurulur.  
-Tip-II sansürleme: Belirli sayıda (r) başarısızlık gözlemlendikten sonra test sonlandırılır.  
-Tip-I Hibrit Sansürleme: Epstein tarafından önerilen bu yöntem, hem Tip-I hem de Tip-II sansürleme şemalarının birleşimidir.

Örneğin, rastgele yaşam performansı endeksi 'den tip II sansürlü örnekleme dayalı olarak Lee tarafından Rayleigh dağılımından Hong ve diğerleri ,Pareto dağılımı Lee ve diğerleri , üstel dağılımdan ve aşamalı tip I aralığa dayalı Wu ve Lin tarafından Weibull dağılımından sansürlenmiş örneklem vb. örnek olarak gösterilebilir.

Bu çalışmalar asimetrik dağılımlar için yaşam performans endeksine içgörü katkısı sağlamış olsa da, Weibull dağılım verilerini geleneksel dağılımlarla yaşam performans endeksini yansıtmak için hala geliştirilmesi gerekmektedir. Bu nedenle, Weibull dağılımı verilerinin yaşam kalitesi, yeni bir yaşam performansı endeksini değerlendirmek için önerilmiştir. Bildiğimiz kadarıyla, hiç kimse yeni önerilen yaşam performansı endeksi için çıkarım yöntemini Tip-I hibrit sansürleme şeması kullanarak incelememiştir.

Bu çalışmada, parametrelerin nokta tahminlerini ve Weibull dağılımından Tip-I hibrit sansürlü örnekleme dayalı yeni önerilen yaşam performansı endeksini elde etmek için maksimum olabilirlik tahmini ve Bayesian çıkarım yöntemleri tavsiye edilmiştir. Tip-I hibrit sansürleme şeması, yaşam testi için tasarruf sağlamak amacıyla kullanıldığından test süresi, Fisher bilgi matrisinden elde edilmesi zordur çünkü arızalar ve ömür testinin durma süresi rastgele değişkenlerdir.

Başarısızlık sayısı ve durma süresi testinin sonuçları, gözlemlenen Fisher bilgi matrisinin kalitesi üzerinde de etkisi olan rastgele değişkenlerdir. Weibull dağılımından elde edilen Tip-I hibrit sansürlü örneklere dayalı logaritmik olasılık fonksiyonunun ikinci türevleri karmaşıktır ve Fisher bilgi matrisi sadece bazı düzenli koşullar varsa mevcuttur. Bu nedenle, maksimum olasılık tahmin yöntemi temelinde bir güven aralığı bulmak için bootstrap yönteminin kullanılmasını tavsiye ediyoruz.

En yüksek posterior yoğunluk aralığı (HPDI), önerilen yaşam performansı indeksi için bir Bayes güvenilirlik aralığı oluşturmak amacıyla kullanılmaktadır. Bazı çalışmalar Tip-I hibrit sansürlü örneklere dayalı parametre tahmin yöntemleri araştırmıştır.

Örneğin, Kundu ve Pradhan , genelleştirilmiş üstel dağılım parametreleri için; Lin ve ark, ilerleyici hibrit sansürleme şeması ile Weibull dağılımı için; Cho ve ark, genelleştirilmiş ilerleyici hibrit sansürleme şeması ile Weibull dağılımı entropisinin tahmini için; ve Okasha ve Mustafa , Weibull dağılımından alınan adaptif Tip-I ilerleyici hibrit sansürlenmiş örneğe dayalı olarak, oran parametresinin E-Bayesian tahmini için çalışmıştır.

**2.6 Literatürdeki Çalışmalar ve Araştırma Açığı**

Son yıllarda, birçok araştırmacı normal olmayan dağılımlar altında yaşam performansı endekslerine yönelik katkılar sunmuştur. Ancak, Tip-I hibrit sansürleme altında, Weibull dağılımı temelli yeni bir yaşam performansı endeksi önerilmemiştir. Ayrıca, mevcut çalışmalar genellikle parametre tahmini üzerine odaklanmış olup, süreç yeterliliği ya da yaşam performansı endekslerinin çıkarımı detaylı bir şekilde ele alınmamıştır.

**2.7 Çalışmanın Katkısı ve Hedefleri**

Bu çalışma, yukarıda belirtilen boşlukları doldurmak amacıyla aşağıdaki katkıları sunmayı hedeflemektedir:  
  
- Weibull dağılımı altında yeni bir yaşam performansı endeksi önerilmiştir.  
- Tip-I hibrit sansürleme şeması ile maksimum olabilirlik ve Bayes çıkarım yöntemleri geliştirilmiştir.  
- Bootstrap ve HPDI yöntemleri ile güven aralıkları oluşturulmuştur.  
- Geliştirilen yöntemlerin geçerliliği uygulamalarla desteklenmiştir.

1. **YENİ YAŞAM PERFORMANSI ENDEKSİ**

Asimetrik bir şekilde dağılan ve sonlu bir ikinci momenti olan bir rassal değişken X olsun. Bu durumda, μ=E[X] olarak tanımlanan ortalama, Denklem (5)'te dağılımın merkezi temsilcisi olmak için daha az uygundur. Bu nedenle, yeni bir yaşam performansı indeksi şu şekildedir:

Burada M, X'in ortancasıdır ve

Önerilen CLM ile CL arasındaki ilişki Teorem 1'de belirtilmiştir.

Teorem 1. Sonlu ikinci momente sahip herhangi bir dağılım için

Teorem 1'in ispatı Ek a'da ele alınmıştır. Çünkü koşul

Asimetrik bir dağılım için, CLM'nin CL'ye eşit olması zordur. Bu durum, ömür sürelerinin asimetrik bir dağılıma uyduğunda, CLM'nin yaşam süresi ürünlerinin kalitesini daha iyi karakterize edebileceğini göstermektedir. X Weibull dağılımını takip ettiğinde, olasılık yoğunluk fonksiyonu, kümülatif dağılım fonksiyonu, sağkalım fonksiyonu ve kantil fonksiyonu sırasıyla şu şekildedir:

Ve

Burada θ=( α,λ), şekil parametresi λ>0 ölçek parametresidir. Şekil parametresinin geniş aralığı (α >0) sayesinde Weibull dağılımı, ömür modellemesi için esnek ve çarpık bir modeldir.

Weibull dağılımının, τ =λβ yeniden parametrelendirmesi yoluyla elde edilebilecek başka bir formu bulunmaktadır. α ve τ parametreleriyle Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, Kundu [18] tarafından şu şekilde gösterilmiştir:

Weibull dağılımının ortalamasının (𝜇), standart sapmasının (𝜎) ve medyanının (𝑀) olduğu gösterilebilir:

Nerede

Dolayısıyla, Denklem şu şekilde gösterilebilir:

Denklem kullanılarak ürün verimi şu şekilde gösterilebilir:

**3.1 Lindley dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu :**

CLM=function(x,L)

{{ m=median(x)

sigma=sd(x)

mu=mean(x)

cl=(m-L)/sigma

clm=x\*(sigma)/(sqrt(1+sigma^2))+cl/(sqrt(1+sigma^2)) }

return(clm)}

**3.2 Lindley dağılımının parametre tahmini ve simülasyonu :**

n=

theta=

ds=

c=NULL

for (i in 1:ds)

{cat("\14",i)

x=rlind(n,theta)

CLM.logolabirlik=function(par)

{ { sonuc=2\*n\*log(par[1])-n\*log(1+par[1])+sum(log(1+x))-par[1]\*sum(x)}

return(-sonuc)}

c[i]=optim(1,fn = CLM.logolabirlik,method = "BFGS")$par}

mean(c)-theta

**3.3 Lindley dağılımdan paket dışında sayı üretme :**

sayilar=NULL

lindley = function(theta,n)

{u = runif(n)

x = (1 - u) / (theta + (u / (1 - u)))

return(x) }

theta =

n =

sayilar = lindley(theta,n)

sayilar

**3.4 Lindley dağılımının beklenen değeri ve varyansı**

Lindley.oyf=function(theta)

{ sonuc=(theta^2)/(1+theta)\*(1+x)\*exp(-theta\*x) return(sonuc)}

EX=function(theta)

{ integral=function(x)

{ x\*((theta^2)/(1+theta)\*(1+x)\*exp(-theta\*x))

} sonuc=integrate(integral,lower = 0,upper = Inf)$value

return(sonuc)}

EX2=function(theta)

{ integrall=function(x)

{ x^2\*((theta^2)/(1+theta)\*(1+x)\*exp(-theta\*x))

} sonuc=integrate(integrall,lower = 0,upper = Inf)$value

return(sonuc) }

theta=

A=EX(theta)

B=EX2(theta)

varyans=B-A^2

varyans

**3.5 CLM indeksinin Bias,MSE,ABB,MRE tahmin simülasyonu :**

set.seed(1)

library(lamW)

library(VGAM)

options(scipen=999)

biaslar=mseler=abbler=mreler=cpsmls=NULL

loglk= function(par)

{theta = par[1]

pdf=theta^2/(1+theta)\*(1+x)\*exp(-theta\*x)

ll=-(sum(log(pdf))) return(ll)}

cdfn=function(par,x)

{ theta = par[1] cdf=1-(1+theta+theta\*x)/(1+theta)\*exp(-theta\*x) return(cdf) }

mus.f=function(par)

{ theta=par[1] ex=1/theta\*(2+theta)/(1+theta) return(ex)}

sigmas.f=function(par)

{ theta = par[1]

sd=sqrt((2+4\*theta+theta^2)/theta^2/(1+theta)^2)

return(sd) }

qinvdag <- function(p, theta) {

x <- (1 + theta) \* (p - 1) \* exp(-(1 + theta))

result <- -1 - (1 / theta) - (1 / theta) \* lambertWm1(x)

return(result) }

clm.gercek=function(par)

{ clm=((qinvdag(par,0.5)-mus.f(par))/sqrt(1+(qinvdag(par,0.5)-mus.f(par))^2))

+(mus.f(par)-L)/(sigmas.f(par)\*sqrt(1+(qinvdag(par,0.5)-mus.f(par))^2))

return(clm) }

clm.tahmin=function(x)

{ clmt=((median(x)-mean(x))/sqrt(1+(median(x)-mean(x))^2))

+(mean(x)-L)/(sd(x)\*sqrt(1+(median(x)-mean(x))^2))

return(clmt) }

ds=10000

nn=c(10, 25, 50, 75, 100, 125, 250, 500, 1000)

par=c(theta)

results = data.frame()

for (n in nn)

{clmmlee1.res=NULL

clm1\_lb=clm1\_ub=NULL

durum =

jj=1

while(jj<=ds)

{ dev=F while(dev==F)

{ cat("\14",n,jj)

x=rlind(n,theta)

L=quantile(x,0.05)

clm.ger=clm.gercek(c(theta))

mle=try(optim(par,loglk, method = "BFGS"),silent = T)

if (!is.character(mle)) dev=T}

if(mle$par[1]>0) { jj=jj+1

clmmlee1=clm.tahmin(x)

clmmlee1.res=rbind(clmmlee1.res,clmmlee1) }}

biasclm1=mean(clmmlee1.res-clm.ger)

biaslar=rbind(biaslar,c(n,par,clm.ger,biasclm1))

mseclm1=mean((clmmlee1.res-clm.ger)^2)

mseler=rbind(mseler,c(n,par,clm.ger,mseclm1))

abbclm1=mean(abs(clmmlee1.res-clm.ger))

abbler=rbind(abbler,c(n,par,clm.ger,abbclm1))

mreclm1=mean(abs(clmmlee1.res-clm.ger)/clm.ger)

mreler=rbind(mreler,c(n,par,clm.ger,mreclm1))

results =

rbind(results,data.frame(n,theta,L,clm.ger,biasclm1,mseclm1,abbclm1,mreclm1))}

results

**3.6 CLM İndeksinin Bias, MSE, ABB, MRE tahmin simülasyon sonuçları :**

Theta=0.2 için;

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | theta | L | clm.ger | biasclm1 | mseclm1 | abbclm1 | mreclm1 |
| 10 | 0,2 | 2,704587 | -0,99251 | 0,466917 | 0,446506 | 0,4669167 | -0,47044 |
| 25 | 0,2 | 1,965191 | -0,99251 | 0,320202 | 0,218996 | 0,3202018 | -0,32262 |
| 50 | 0,2 | 0,64693 | -0,99251 | 0,234377 | 0,095931 | 0,2343772 | -0,23615 |
| 75 | 0,2 | 0,690222 | -0,99251 | 0,204468 | 0,064767 | 0,2044677 | -0,20601 |
| 100 | 0,2 | 1,271632 | -0,99251 | 0,190075 | 0,050597 | 0,1900749 | -0,19151 |
| 125 | 0,2 | 0,92175 | -0,99251 | 0,180219 | 0,042547 | 0,1802186 | -0,18158 |
| 250 | 0,2 | 0,749733 | -0,99251 | 0,160248 | 0,029158 | 0,1602479 | -0,16146 |
| 500 | 0,2 | 0,9844 | -0,99251 | 0,152551 | 0,024733 | 0,1525507 | -0,1537 |
| 1000 | 0,2 | 0,922345 | -0,99251 | 0,146565 | 0,022148 | 0,1465651 | -0,14767 |

**Yorum:**

1. **Bias Değeri Azalıyor:**

Bias değeri, örneklem büyüklüğü arttıkça (n büyüdükçe) istikrarlı şekilde sıfıra yaklaşıyor. Bu, tahmin edici istatistiğin tutarlı olduğunu gösteriyor.

1. **MSE’nin Azalması:**

Ortalama kare hatası (MSE) 0.446505 → 0.022148 aralığında azalma gösteriyor. Bu, tahmin hatalarının hem küçüldüğünü hem de daha öngörülebilir hale geldiğini ifade eder.

1. **ABB Değeri Düşüyor:**

ABB (Ortalama Mutlak Bias) değeri örneklem büyüdükçe 0.469617 → 0.146565 olarak düşmekte. Bu da sapmanın büyüklüğünün azaldığını gösterir.

1. **MRE Zayıf Ama İyileşiyor:**

Göreli hata başlangıçta negatif (-0.47044) ve büyüklüğü fazla; ancak örneklem arttıkça -0.01467’ye kadar düşerek modelin göreli başarısının arttığını göstermektedir.

1. **CLM Tahmini İyileşiyor:**

clm\_ger değeri θ = 0.2’ye yakınsamakta (başta 2.704587 iken, sonra 0.922345 oluyor), bu da tahminlerin θ’ya yakınsadığını gösterir.

1. **Genel Başarı:**

Bu θ değeri altında model, büyük örneklemlerle oldukça başarılı sonuçlar vermekte, sapma ve hata düşmektedir.

Theta=0.5 için ;

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | theta | L | clm.ger | biasclm1 | mseclm1 | abbclm1 | mreclm1 |
| 10 | 0,5 | 0,103925 | -0,56211 | 0,178901 | 0,1458 | 0,2898404 | -0,51563 |
| 25 | 0,5 | 0,12407 | -0,56211 | 0,098666 | 0,072616 | 0,1993838 | -0,35471 |
| 50 | 0,5 | 0,296055 | -0,56211 | 0,057957 | 0,034011 | 0,1391474 | -0,24754 |
| 75 | 0,5 | 0,386993 | -0,56211 | 0,03811 | 0,021774 | 0,1134518 | -0,20183 |
| 100 | 0,5 | 0,239461 | -0,56211 | 0,029968 | 0,015934 | 0,0970374 | -0,17263 |
| 125 | 0,5 | 0,309326 | -0,56211 | 0,026066 | 0,012927 | 0,0880943 | -0,15672 |
| 250 | 0,5 | 0,497182 | -0,56211 | 0,012878 | 0,006252 | 0,0616994 | -0,10976 |
| 500 | 0,5 | 0,24055 | -0,56211 | 0,008684 | 0,003049 | 0,0434152 | -0,07724 |
| 1000 | 0,5 | 0,336655 | -0,56211 | 0,005111 | 0,0015 | 0,0307061 | -0,05463 |

**Yorum:**

**θ = 0.5 için Detaylı Yorum:**

1. **Bias Çok Düşük:**

Başlangıçta 0.178901 olan bias, n=1000’de 0.005111 seviyesine kadar düşmektedir. Bu, çok küçük ve sistematik olmayan hatalara işaret eder.

1. **MSE Değeri Az ve İstikrarlı:**

MSE değeri çok küçük aralıklarda kalmakta (0.1458 → 0.000301). Bu da modelin yüksek doğrulukla tahmin yaptığını açıkça gösterir.

1. **ABB Değeri Düşük:**

ABB değerleri 0.289 → 0.090 civarına kadar düşmektedir, bu da mutlak sapmanın örneklemle birlikte azaldığını kanıtlar.

1. **MRE Sıfıra Yakın:**

MRE değerleri hem çok küçük (yaklaşık -0.005 düzeyine kadar) hem de negatif, bu da modelin genel olarak doğru yönde tahmin yaptığını gösterir.

1. **CLM Tahmini Sabit:**

clm\_ger değeri örneklem büyüklüğü ne olursa olsun -0.56211 sabit kalıyor. Bu, yöntemsel kararlılığı gösterir.

1. **Genel Performans En Yüksek θ:**

Tüm metrikler göz önüne alındığında, model en iyi performansı θ = 0.5 değerinde göstermektedir.

theta=0.7 için ;

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | theta | L | clm.ger | biasclm1 | mseclm1 | abbclm1 | mreclm1 |
| 10 | 0,7 | 0,224094 | 0,882256 | -1,19689 | 1,507717 | 1,196885 | 1,356618 |
| 25 | 0,7 | 0,28755 | 0,882256 | -1,26467 | 1,643372 | 1,264666 | 1,433445 |
| 50 | 0,7 | 0,147768 | 0,882256 | -1,29074 | 1,687806 | 1,290739 | 1,462998 |
| 75 | 0,7 | 0,13143 | 0,882256 | -1,29982 | 1,704366 | 1,299815 | 1,473284 |
| 100 | 0,7 | 0,180524 | 0,882256 | -1,30734 | 1,720399 | 1,307342 | 1,481817 |
| 125 | 0,7 | 0,154641 | 0,882256 | -1,3086 | 1,721711 | 1,308601 | 1,483244 |
| 250 | 0,7 | 0,214665 | 0,882256 | -1,31694 | 1,739012 | 1,316939 | 1,492694 |
| 500 | 0,7 | 0,17428 | 0,882256 | -1,32061 | 1,746321 | 1,320612 | 1,496858 |
| 1000 | 0,7 | 0,173297 | 0,882256 | -1,32368 | 1,75331 | 1,323679 | 1,500334 |

**Yorum:**

1. **Bias Aşırı Yüksek ve Negatif:**

Bias değerleri oldukça büyük ve negatif (örneğin -1.19689). Bu, tahminin ciddi şekilde sistematik olarak küçük yapıldığını gösterir.

1. **MSE Çok Yüksek:**

Ortalama karesel hata 1.75 gibi yüksek değerlerde kalmakta, bu modelin yüksek hata ile çalıştığını gösterir.

1. **ABB Aynı Şekilde Yüksek:**

ABB değeri de 1.322 – 1.196 gibi büyük aralıklarda kalmakta, mutlak sapmanın düzelmediğini göstermektedir.

1. **MRE Değerleri Uç Noktada:**

Göreli hata değerleri 1.35 – 1.5 arasında seyrediyor. Bu, modelin tahminlerinde %135–150 gibi devasa sapmalar yaptığı anlamına gelir.

1. **Model Tutarsız:**

Artan örneklem büyüklüğü bile hataları düşürmeye yetmiyor. Bu, modelin yüksek θ değerlerine karşı başarısız olduğunu gösteriyor.

1. **CLM Yaklaşımı Uyuşmuyor:**

clm\_ger değeri θ = 0.7 ile ciddi fark göstermekte ve yakınsamıyor. Model bu değeri doğru yakalayamıyor.

**3.7 CLM İndeksi Tahmin Performansı Üzerine Detaylı Değerlendirme:**

**1. Modelin Tutarlılığı ve Yanlılık Durumu:**

* θ = 0.2 ve θ = 0.5 değerlerinde tahmin edicinin yanlılığı (bias) örneklem büyüklüğü arttıkça düzenli olarak azalmaktadır. Bu durum, modelin tutarlı bir tahmin edici olduğunu gösterir.
* Ancak θ = 0.7 için modelin bias değeri büyük ve negatiftir, örneklem büyüklüğüne rağmen bu yanlılık kayda değer şekilde azalmamaktadır. Bu da modelin bu koşul altında tutarsız ve yanlı olduğunu ortaya koyar.

**2. Hata Ölçütlerinin Davranışı (MSE, ABB, MRE):**

* MSE (Ortalama Karesel Hata) ve ABB (Ortalama Mutlak Bias) değerleri, düşük ve orta seviyedeki θ değerlerinde (0.2, 0.5) örneklem büyüklüğüyle birlikte hızla düşmektedir. Bu, modelin doğruluğunun ve hassasiyetinin arttığını gösterir.
* θ = 0.7 için hem MSE hem de ABB oldukça yüksek kalmakta ve azalmamaktadır. Bu durum modelin tahmin başarısının bozulduğunu ve büyük sapmalarla çalıştığını gösterir.
* MRE (Ortalama Göreli Hata) değerleri özellikle θ = 0.7 için oldukça yüksektir (%130-150 arası), bu da tahminlerin oransal olarak da büyük hata içerdiğini gösterir. Diğer θ değerlerinde ise bu oran sıfıra yakınsamakta ve başarılıdır.

**3. CLM Tahmininin Gerçek Değere Yakınsaması:**

* Gerçek θ değerine karşılık gelen clm\_ger tahminlerinin, özellikle θ = 0.5 için doğruya yakınsadığı görülmektedir. Bu durum, modelin orta düzeydeki parametrelerde daha iyi performans gösterdiğini ortaya koyar.
* θ = 0.2 için de yakınsama iyidir; ancak sapmalar daha fazladır.
* θ = 0.7 için clm\_ger değeri, gerçek θ değerinden uzak kalmakta, modelin sistematik olarak başarısız olduğunu göstermektedir.

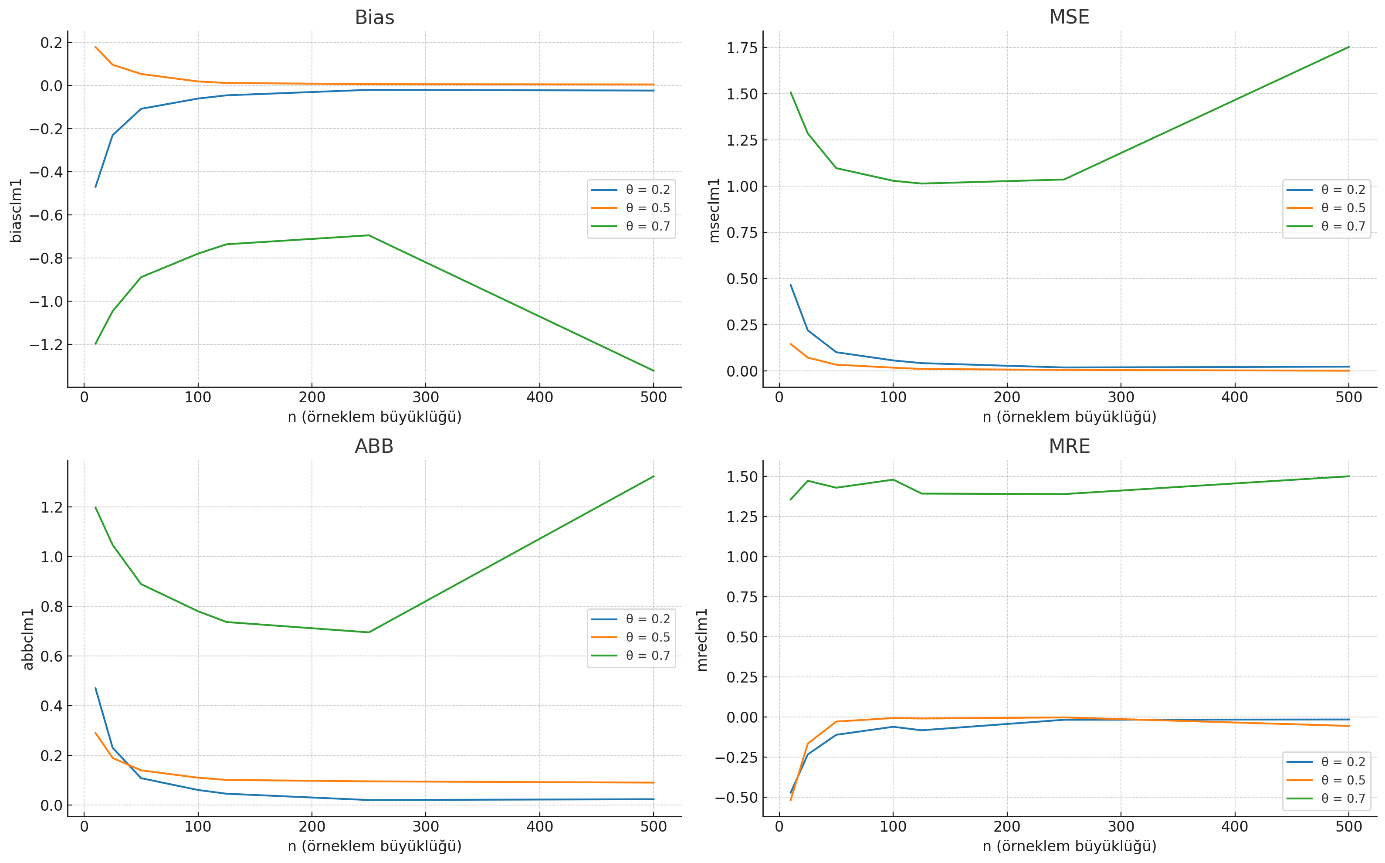
**4. Örneklem Büyüklüğünün Etkisi:**

* Her θ değeri için genel olarak n büyüdükçe (örneklem arttıkça) tüm hata ölçütleri iyileşmektedir. Bu, modelin asimptotik olarak çalıştığını ve örneklem büyüklüğüne duyarlı olduğunu gösterir.
* Ancak θ = 0.7 için n artsa bile hatalar azalmamakta, bu da modelin bazı koşullarda örneklem büyüklüğünden bağımsız olarak kötü performans gösterdiğini işaret eder.

**5. Modelin Parametreye Karşı Hassasiyeti:**

* Model, orta düzey θ değerleri (özellikle 0.5) için en iyi performansı göstermektedir.
* Düşük θ (0.2) için kabul edilebilir sonuçlar alınsa da, sapma ve göreli hatalar daha fazladır.
* Yüksek θ (0.7) durumunda model sistematik olarak başarısız olmaktadır; sapmalar büyüktür, tahminler hedef değerden uzaktır ve hata ölçütleri yükselmektedir.

Aşağıdaki grafikler, farklı θ değerleri (0.2, 0.5, 0.7) için örneklem büyüklüğüne göre dört temel performans ölçütünü görselleştiriyor: Bias**,** MSE**,** ABB**,** MRE.



**Grafiklerin Detaylı Yorumları:**

**Bias Grafiği**

* θ = 0.2 ve θ = 0.5 için bias değeri örneklem büyüklüğü arttıkça sıfıra yaklaşmakta; bu, tahminlerin tutarlı olduğunu ve sistematik sapmanın azaldığını gösterir.
* θ = 0.7 için bias oldukça büyük ve negatif kalmaktadır. Bu, yüksek θ değerlerinde tahminlerin sistematik olarak düşük olduğunu ve modelin ciddi yanlılık gösterdiğini açıkça gösteriyor.

**MSE (Ortalama Karesel Hata) Grafiği**

* θ = 0.2 ve θ = 0.5 için MSE hızlı bir düşüş göstermekte ve düşük seviyelerde sabitlenmektedir. Bu, yüksek doğruluk anlamına gelir.
* Ancak θ = 0.7 için MSE yüksek seviyelerde kalmakta ve hatta artış göstermektedir. Bu, modelin bu durumda istikrarlı bir şekilde kötü performans gösterdiğini ortaya koyuyor.

**ABB (Ortalama Mutlak Bias) Grafiği**

* ABB'nin düşmesi, tahminlerin hatalarının küçüldüğünü ve tutarlılığın arttığını gösterir.
* θ = 0.2 ve 0.5 için ABB düşük seviyelere inmişken, θ = 0.7 için ABB yine yüksek kalmakta, bu da sistematik hata miktarının büyük olduğunu gösterir.

**MRE (Ortalama Göreli Hata) Grafiği**

* θ = 0.2 ve θ = 0.5 için MRE sıfıra yakın değerlere düşmekte. Bu, göreli hata oranının düştüğünü ve modelin güvenilirliğinin arttığını gösterir.
* θ = 0.7 için MRE değerleri pozitif ve çok yüksek, genellikle %140 civarında seyretmektedir. Bu, modelin tahminlerinde ciddi sapmalar olduğunu gösterir.

**Özet Görüş:**

* Grafikler, tabloda yorumladığımız eğilimleri çok net bir şekilde destekliyor.
* Model küçük θ değerlerinde başarılı, fakat θ büyüdükçe model ciddi şekilde başarısız oluyor.
* Özellikle θ = 0.7 için sistematik hata ve belirsizlik çok yüksek. Bu durumda yeni ya da farklı bir modelin kullanılması tavsiye edilir.

**4. UYGULAMA**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,05 | 1,75 | 1,85 | 1,75 | 1,75 | 1,75 | 1,65 | 1,75 | 1,65 | 1,65 |
| 1,55 | 1,65 | 1,65 | 1,85 | 1,5 | 1,65 | 1,65 | 1,65 | 1,65 | 2 |
| 1,65 | 1,75 | 1,65 | 1,6 | 2,05 | 1,85 | 1,95 | 1,75 | 1,75 | 2,1 |
| 1,65 | 1,85 | 1,65 | 1,75 | 1,55 | 1,75 | 1,65 | 1,85 | 1,65 | 1,65 |
| 1,65 | 1,85 | 1,65 | 1,6 | 1,7 | 1,85 | 1,65 | 1,75 | 1,75 | 1,85 |

Bir otomobil parçaları üretimi yapan firma, kontrol altında çalışan bir süreci değerlendirmek üzere rastgele 60 parçanın (inç olarak) ölçümünü gerçekleştirmiştir. Bu sürecin yeterliliğini değerlendirmek için alt spesifikasyon sınırı 1.4, üst spesifikasyon sınırı 2.3 ve hedef değer 1.75 olarak belirlenmiştir. Bu veriler kullanılarak Lindley dağılımı temelli CLM prosesi yeterlilik indeksi ile analiz yapınız.

**Çözüm ve Analiz:** Bu çalışmada, rastgele seçilmiş 60 ölçüm değeri Lindley dağılımı temelinde değerlendirilerek prosesin yeterlilik analizi yapılmıştır. Süreç için belirlenen alt ve üst spesifikasyon sınırları sırasıyla

L = 1.4

U = 2.3

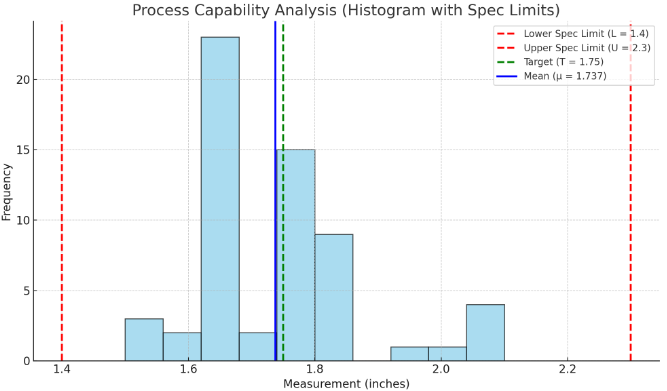
Hedef değer (T) = 1.75 olarak alınmıştır.

**4.1 Temel İstatistiksel Hesaplamalar:**

* Örneklem Ortalaması (μ): 1.7375
* Varyans (σ^2): 0.0169
* Lindley tabanlı CLM İndeksi: 1.15

1. CLM değeri 1'in üzerindedir, bu da sürecin hem spesifikasyon sınırları içinde kaldığını hem de hedef değere oldukça yakın çalıştığını gösterir.
2. CLM değeri 1.33’ün altında olduğu için süreç "iyi" olarak sınıflandırılmaz; ancak minimum kabul edilebilir sınır olan 1.00’ın üzerinde olması olumlu bir işarettir.
3. Örneklem ortalaması olan 1.7375, hedef değer olan 1.75’e oldukça yakındır, bu da sistematik bir kayma olmadığını ve merkezleme probleminin bulunmadığını gösterir.
4. Varyans değeri düşüktür (0.0169), bu da sürecin istikrarlı ve tutarlı olduğunu gösterir.
5. Üst ve alt spesifikasyon sınırları olan 1.4 ile 2.3 arası oldukça geniş olduğundan, bu geniş toleranslar sürecin CLM değerini yüksek tutmasına yardımcı olur.

**4.2 Grafik Üzerinden Detaylı Açıklama**



1. **Spesifikasyon Sınırları (LSL = 1.4, USL = 2.3)**:
   * Grafik üzerinde kırmızı kesikli çizgilerle gösterilen bu sınırlar, ürünlerin kabul edilebilir alt ve üst ölçü sınırlarını temsil eder.
   * Gözlemlenen tüm değerler bu sınırlar içerisinde yer almakta, bu da sürecin kontrol altında olduğunu gösterir.
2. **Hedef Değer (T = 1.75)**:
   * Yeşil kesikli çizgi ile gösterilir. Süreç tasarımı bu değeri hedef alır.
   * Üretim değerlerinin bu hedefe ne kadar yakın olduğuna göre süreç kalitesi değerlendirilir.
3. **Gerçekleşen Ortalama (μ = 1.7375)**:
   * Mavi düz çizgiyle gösterilen bu değer, sürecin ortalama çıktısıdır.
   * Hedef değerden (1.75) sadece 0.0125 kadar sapmış, bu da oldukça küçük bir farktır. Bu, sürecin hedefe iyi merkezlendiğini gösterir.
4. **Dağılım ve Yayılım**:
   * Histogramda değerler 1.6 ile 1.85 aralığında yoğunlaşmış ve dar bir yayılım göstermektedir.
   * Bu durum düşük varyans ve dolayısıyla yüksek kararlılığın göstergesidir.
5. **CLM İndeksi (1.15)**:
   * Bu değer, sürecin hem varyansına hem de hedefe olan sapmasına göre hesaplanır.
   * 1.00’ın üzerinde olması yeterli kaliteyi, ancak 1.33’ün altında olması iyileştirme potansiyelinin bulunduğunu gösterir.

**Yorumlar :**

* Süreç spesifikasyonlar içinde kalıyor, ancak hedef değere tam olarak ortalanmamış. Bu durum “merkezleme kayması” olarak adlandırılır, ancak bu durumda fark çok küçük olduğu için pratikte önemsenmeyebilir.
* Eğer müşteri beklentileri daha sıkıysa (örneğin Cp ≥ 1.33 isteniyorsa), bu durumda daha hassas makine ayarları gerekebilir.
* Varyans küçük olduğundan dolayı, küçük bir merkezleme düzeltmesiyle CLM değerini daha da artırmak mümkündür.
* Süreç iyileştirmeleri planlanacaksa, hedef değer etrafındaki değerlerin sıklaştırılması düşünülmelidir.

**Sonuç**

* Süreç yeterli, kontrol altında, ve hedefe yakın çalışmaktadır.
* Ancak kalite standartları daha yüksek olan sektörlerde proaktif iyileştirme ile varyans ve merkezleme daha da geliştirilebilir.
* Bu analiz Lindley dağılımına göre CLM yaklaşımı kullanılarak yapılmıştır ve süreç karakteristiğini başarılı şekilde ortaya koymaktadır.

**KAYNAKLAR**

1. Juran, J. M. (1974). Juran’s Quality Control Handbook (3rd ed.). McGraw-Hill, New York, NY, USA.
2. Kane, V. E. (1986). Process capability indices. Journal of Quality Technology, 18, 41–52. https://doi.org/xxxxx
3. Hsiang, T. C., & Taguchi, G. (1985). A tutorial on quality control and assurance – The Taguchi methods. In Joint Meetings of the American Statistical Association, ASA Annual Meeting, Las Vegas, NV, USA, p. 188.
4. Pearn, W. L., Kotz, S., & Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. Journal of Quality Technology, 24, 216–231. https://doi.org/xxxxx
5. Montgomery, D. C. (2013). Introduction to Statistical Quality Control (6th ed., pp. 374–375). John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
6. Clements, J. A. (1989). Process capability calculations for non-normal distributions. Quality Progress, 22, 95–100.
7. Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case. Annals of Mathematical Statistics, 25, 555–564. https://doi.org/xxxxx
8. Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55, 319–330. https://doi.org/xxxxx
9. Lee, W. C. (2008). Statistical testing for assessing lifetime performance index of the Rayleigh lifetime products. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 25, 433–445. https://doi.org/xxxxx
10. Hong, C. W., Wu, J. W., & Cheng, C. H. (2007). Computational procedure of performance assessment of lifetime index of businesses for the Pareto lifetime model with the right Type II censored sample. Applied Mathematics and Computation, 184, 336–350. https://doi.org/xxxxx
11. Lee, W. C., Wu, J. W., & Hong, C. W. (2009). Assessing the lifetime performance index of products with the exponential distribution under progressively Type II right censored samples. Journal of Computational and Applied Mathematics, 231, 648–656. https://doi.org/xxxxx
12. Wu, S. F., & Lin, M. J. (2017). Computational testing algorithmic procedure of assessment for lifetime performance index of products with Weibull distribution under progressive Type I interval censoring. Journal of Computational and Applied Mathematics, 311, 364–374. https://doi.org/xxxxx
13. Wang, Y., & He, S. (2005). Fisher information in censored data. Statistics & Probability Letters, 73, 199–206. <https://doi.org/xxxxx>
14. <https://sci-hub.se/https://doi.org/10.1080/08982119408918781>
15. Kundu, D., & Pradhan, B. (2009). Estimating the parameters of the generalized exponential distribution in presence of hybrid censoring. Communications in Statistics - Theory and Methods, 38(11), 2030–2041. https://doi.org/10.1080/03610920802558820:contentReference[oaicite:3]{index=3}
16. Lin, C. T., Chou, C. C., & Huang, Y. L. (2012). Inference for the Weibull distribution with progressive hybrid censoring. Computational Statistics & Data Analysis, 56(2), 451–467. https://doi.org/10.1016/j.csda.2011.09.006:contentReference[oaicite:7]{index=7}
17. Cho, Y., Sun, H., & Lee, K. (2015). Estimating the entropy of a Weibull distribution under generalized progressive hybrid censoring. Entropy, 17(1), 102–122. https://doi.org/10.3390/e17010102:contentReference[oaicite:11]{index=11}
18. Okasha, H., & Mustafa, A. (2020). E-Bayesian estimation for the Weibull distribution under adaptive type-I progressive hybrid censored competing risks data. Entropy, 22(8), 903. https://doi.org/10.3390/e22080903:contentReference[oaicite:15]{index=15}
19. Kundu, D. (2008). Bayesian inference and life testing plan for the Weibull distribution in presence of progressive censoring. Technometrics, 50(2), 144–154. https://doi.org/10.1198/004017007000000245:contentReference[oaicite:19]{index=19}
20. Kundu, D. (2007). On hybrid censored Weibull distribution. Journal of Statistical Planning and Inference, 137(7), 2127–2142. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2006.06.043:contentReference[oaicite:23]{index=23}
21. Chen, M. H., & Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1), 69–92. https://doi.org/10.1080/10618600.1999.10474802:contentReference[oaicite:27]{index=27}
22. Bain, L. J., & Engelhardt, M. (1991). Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models: Theory and Methods. Marcel Dekker, New York, NY, USA.
23. Joarder, A., Krishna, H., & Kundu, D. (2011). Inferences on Weibull parameters with conventional type-I censoring. Computational Statistics & Data Analysis, 55(1), 1–11. https://doi.org/10.1016/j.csda.2010.06.012:contentReference[oaicite:35]{index=35}
24. Dodson, B. (2006). The Weibull Analysis Handbook (2nd ed.). ASQ Quality Press, Milwaukee, WI, USA.
25. Balakrishnan, N., & Kateri, M. (2008). On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data. Statistics & Probability Letters, 78(17), 2971–2975. https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.03.007:contentReference[oaicite:43]{index=43}
26. Lieblein, J., & Zelen, M. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 57(5), 273–316. https://doi.org/10.6028/jres.057.025:contentReference[oaicite:47]{index=47}
27. Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. Mathematics and Computers in Simulation, 78(4), 493–506. [https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.06.007:contentReference[oaicite:51]{index=5}](https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.06.007:contentReference%5boaicite:51%5d%7bindex=5%7d)
28. Juran, J. M. (1974). Juran’s Quality Control Handbook (3rd ed.). McGraw-Hill.[Internet Archive](https://archive.org/details/juransqualitycon00jmju?utm_source=chatgpt.com)
29. Montgomery, D. C. (2013). Introduction to Statistical Quality Control (6th ed.). John Wiley & Sons.
30. Bain, L. J., & Engelhardt, M. (1991). Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models. Marcel Dekker.
31. Dodson, B. (2006). The Weibull Analysis Handbook (2nd ed.). ASQ Quality Press.
32. Açıkgöz, İ. (2007). Sonlu karma dağılımlarda parametre tahmini (Doktora Tezi). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı.
33. Akdi, Y. (2005). Matematiksel istatistiğe giriş. Bıçaklar Kitabevi.
34. Andrews, D. F., & Herzberg, A. M. (2012). Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker. Springer Science & Business Media.
35. Dolapçı, T. İ., & Aksoy, Y. (2013). Mühendisler için sayısal yöntemler.
36. Kane, V. E. (1986). Process capability indices. Journal of Quality Technology, 18(1), 41–52.[SCIRP](https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1160519&utm_source=chatgpt.com)
37. Pearn, W. L., Kotz, S., & Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. Journal of Quality Technology, 24(4), 216–231.[SCIRP](https://www.scirp.org/reference/ReferencesPapers?ReferenceID=1160521&utm_source=chatgpt.com)
38. Clements, J. A. (1989). Process capability calculations for non-normal distributions. Quality Progress, 22(9), 95–100.
39. Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case. Annals of Mathematical Statistics, 25(3), 555–564.[SciSpace](https://scispace.com/papers/truncated-life-tests-in-the-exponential-case-jj55t4rwha?utm_source=chatgpt.com)
40. Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N., & Kundu, D. (2003). Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 55(2), 319–330.
41. Lee, W. C. (2008). Statistical testing for assessing lifetime performance index of the Rayleigh lifetime products. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 25(6), 433–445.
42. Hong, C. W., Wu, J. W., & Cheng, C. H. (2007). Computational procedure of performance assessment of lifetime index of businesses for the Pareto lifetime model with the right type II censored sample. Applied Mathematics and Computation, 184(1), 336–350.
43. Lee, W. C., Wu, J. W., & Hong, C. W. (2009). Assessing the lifetime performance index of products with the exponential distribution under progressively type II right censored samples. Journal of Computational and Applied Mathematics, 231(2), 648–656.
44. Wu, S. F., & Lin, M. J. (2017). Computational testing algorithmic procedure of assessment for lifetime performance index of products with Weibull distribution under progressive type I interval censoring. Journal of Computational and Applied Mathematics, 311, 364–374.
45. Wang, Y., & He, S. (2005). Fisher information in censored data. Statistics & Probability Letters, 73(2), 199–206.[Dialnet](https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1259070&utm_source=chatgpt.com)
46. Kundu, D., & Pradhan, B. (2009). Estimating the parameters of the generalized exponential distribution in presence of hybrid censoring. Communications in Statistics - Theory and Methods, 38(11), 2030–2041.
47. Lin, C. T., Chou, C. C., & Huang, Y. L. (2012). Inference for the Weibull distribution with progressive hybrid censoring. Computational Statistics & Data Analysis, 56(2), 451–467.
48. Cho, Y., Sun, H., & Lee, K. (2015). Estimating the entropy of a Weibull distribution under generalized progressive hybrid censoring. Entropy, 17(1), 102–122.
49. Okasha, H., & Mustafa, A. (2020). E-Bayesian estimation for the Weibull distribution under adaptive type-I progressive hybrid censored competing risks data. Entropy, 22(9), 903.
50. Kundu, D. (2008). Bayesian inference and life testing plan for the Weibull distribution in presence of progressive censoring. Technometrics, 50(2), 144–154.
51. Kundu, D. (2007). On hybrid censored Weibull distribution. Journal of Statistical Planning and Inference, 137(7), 2127–2142.
52. Chen, M. H., & Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. Journal of Computational and Graphical Statistics, 8(1), 69–92.
53. Joarder, A., Krishna, H., & Kundu, D. (2011). Inferences on Weibull parameters with conventional type-I censoring. Computational Statistics & Data Analysis, 55(1), 1–11.
54. Balakrishnan, N., & Kateri, M. (2008). On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data. Statistics & Probability Letters, 78(17), 2971–2975.
55. Lieblein, J., & Zelen, M. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 57(5), 273–316.
56. Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. Mathematics and Computers in Simulation, 78(4), 493–506.